Quelques approximations du temps local brownien

Blandine Berard Bergery, Pierre P. Vallois

Quelques approximations du temps local brownien

Blandine Bérard Bergery [a], Pierre Vallois [a]

[a] *Université Henri Poincaré, Institut de Mathématiques Elie Cartan, B.P. 239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France*

Résumé

On définit plusieurs approximations du processus des temps locaux $(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ au niveau x du mouvement brownien réel (X_t). En particulier, on montre que $\frac{2}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}}du+\frac{2}{\epsilon}\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u>0\}}du$ et $\frac{4}{\epsilon}\int_0^t X_u^-\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}}du$ convergent au sens ucp vers L_t^0, lorsque $\epsilon\to 0$. D'autre part, on montre que $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t(\mathbb{1}_{\{x<X_{s+\epsilon}\}}-\mathbb{1}_{\{x<X_s\}})(X_{s+\epsilon}-X_s)ds$ converge vers L_t^x dans $L^2(\Omega)$ et que la vitesse de convergence est d'ordre ϵ^α, pour tout $\alpha<\frac{1}{4}$.

Abstract

Some Brownian local time approximations
We give some approximations of the local time process $(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ at level x of the real Brownian motion (X_t). We prove that $\frac{2}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}}du+\frac{2}{\epsilon}\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u>0\}}du$ and $\frac{4}{\epsilon}\int_0^t X_u^-\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}}du$ converge in the ucp sense to L_t^0, as $\epsilon\to 0$. We show that $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t(\mathbb{1}_{\{x<X_{s+\epsilon}\}}-\mathbb{1}_{\{x<X_s\}})(X_{s+\epsilon}-X_s)ds$ goes to L_t^x in $L^2(\Omega)$ as $\epsilon\to 0$, and that the rate of convergence is of order ϵ^α, for any $\alpha<\frac{1}{4}$.

Mots-clés: temps local, intégration stochastique par régularisation, variation quadratique, vitesse de convergence.
classification AMS: 60G44, 60H05, 60H99, 60J55, 60J65.

Dans cette Note, le processus X est continu, et la convergence en probabilité, uniformément sur les compacts, sera notée ucp (voir Section II.4 de [3]).

1. Définition du premier schéma d'approximation

1.1. Il existe déjà de nombreuses approximations du temps local de larges classes de processus (voir [1], [2], [4]). L'objectif de cette Note est de présenter de nouveaux schémas d'approximation du temps local du mouvement brownien standard réel et de certaines martingales browniennes. On se place dans le cadre de l'intégration par régularisation définie par Russo et Vallois ([5], [7], [8]). On rappelle (c.f. [7]) que la

Email addresses: berardb@iecn.u-nancy.fr (Blandine Bérard Bergery), Pierre.Vallois@iecn.u-nancy.fr (Pierre Vallois).

covariation $[X,Y]$ est la limite au sens ucp de $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (Y_{s+\epsilon}-Y_s)(X_{s+\epsilon}-X_s)\,ds$, si cette limite existe. On définit

$$J_\epsilon(t,y) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{y<X_{s+\epsilon}\}} - \mathbb{1}_{\{y<X_s\}}\right)(X_{s+\epsilon}-X_s)\,ds, \quad y\in\mathbb{R}, t\geqslant 0. \tag{1}$$

1.2. Il est facile de montrer que si $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et X admet une variation quadratique $[X,X]$, alors

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ (\text{ucp}) \int_{\mathbb{R}} f(y)J_\epsilon(t,y)dy = \int_0^t f(X_s)d[X,X]_s, \quad f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Lorsque X est une semi-martingale, $[X,X]$ est égal à la variation quadratique usuelle et X a un processus des temps locaux $(L_t^a)_{a\in\mathbb{R},t\geqslant 0}$. La formule de densité d'occupation permet d'écrire (2) sous la forme :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ (\text{ucp}) \int_{\mathbb{R}} f(y)J_\epsilon(t,y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)L_t^y dy, \quad f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}).$$

Ce qui suggère de montrer la convergence de $J_\epsilon(t,y)$ vers L_t^y, quand ϵ tend vers 0. Compte tenu de (1), cette question est équivalente à $[\mathbb{1}_{\{y<X_.\}}, X_.]_t = L_t^y$.
Pour simplifier les notations, on prend $y=0$ et on note simplement $J_\epsilon(t) = J_\epsilon(t,0)$.

2. Convergence de $J_\epsilon(t)$

On peut décomposer d'une manière naturelle $J_\epsilon(t)$ en une somme de deux termes :

$$J_\epsilon(t) = \underbrace{-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \mathbb{1}_{\{0<X_s\}}(X_{s+\epsilon}-X_s)\,ds}_{I_\epsilon^1(t)} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \mathbb{1}_{\{0<X_{s+\epsilon}\}}(X_{s+\epsilon}-X_s)\,ds}_{I_\epsilon^2(t)}. \tag{3}$$

Théorème 2.1 *On suppose que X est un mouvement brownien standard réel. Alors :*

(i) $\lim_{\epsilon\to 0}(\text{ucp})\, J_\epsilon(t) = [\mathbb{1}_{\{0<X_s\}}, X_s]_t = L_t^0$.

(ii) $\lim_{\epsilon\to 0}(\text{ucp})\, I_\epsilon^1(t) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{0<X_s\}}dX_s$.

(iii) $\lim_{\epsilon\to 0}(\text{ucp})\, I_\epsilon^2(t) = X_t^+ + \frac{1}{2}L_t^0$.

Preuve du Théorème 2.1. Puisque $f: x\to \mathbb{1}_{\{0<x\}}\in L^2_{loc}$ et $x\to x^+$ est une primitive de f, le Théorème 4.1 de [6] s'applique : $[f(X),X]_t$ existe, vaut $2\left(X_t^+ - X_0^+ - \int_0^t \mathbb{1}_{\{0<X_s\}}dX_s\right)$ et la formule de Tanaka donne alors le point (i). Toujours par [6], on a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ (\text{ucp})\ \frac{1}{\epsilon}\int_0^t Y_s(X_{s+\epsilon}-X_s)\,ds = \int_0^t Y_s dX_s, \tag{4}$$

avec $Y_s = f(X_s)$, ce qui donne le point (ii). Le point (iii) se déduit des deux précédents via la formule de Tanaka. □

Remarque : Plus généralement, si $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une semi-martingale et (Y_t) un processus adapté tel que $t\to Y_t$ admet des limites à gauche, alors (4) a lieu (c.f. [8], Proposition 3.31). Signalons un résultat qui ne concerne pas directement l'approximation du temps local mais qui est très lié à notre étude : si (Y_t) est un processus adapté et localement höldérien, alors la convergence (4) a lieu presque sûrement, uniformément pour $t\in[0,T]$.

3. Autres schémas d'approximation

D'après la décomposition (3) et le Théorème 2.1, $J_\epsilon(t)$ se décompose en deux termes ayant chacun une limite. Mais ces deux limites ne s'expriment pas uniquement en fonction du temps local. On cherche donc une autre décomposition de $J_\epsilon(t)$ en des termes qui convergent chacun vers une fraction du temps local. En écrivant $1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}} - 1\!\!1_{\{X_u>0\}} = 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0, X_u\leqslant 0\}} - 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0, X_u>0\}}$, on obtient facilement :

$$J_\epsilon(t) = I^3_\epsilon(t) + I^4_\epsilon(t) + I^5_\epsilon(t) + R_\epsilon(t), \tag{5}$$

avec
$$I^3_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t} 1\!\!1_{\{X_u\leqslant 0\}}du + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t} 1\!\!1_{\{X_u>0\}}du, \tag{6}$$

$$I^4_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_u 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}}du, \qquad I^5_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0\}}du, \tag{7}$$

et $R_\epsilon(t)$ un terme qui converge presque sûrement vers 0, uniformément sur les compacts.

Théorème 3.1 *Si X est le mouvement Brownien standard, alors*
(i) $\lim_{\epsilon\to 0}$ (ucp) $I^3_\epsilon(t) = \frac{1}{2}L^0_t$.
(ii) $\lim_{\epsilon\to 0}$ (ucp) $I^4_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon\to 0}$ (ucp) $I^5_\epsilon(t) = \frac{1}{4}L^0_t$.

Remarque :
1) Ce résultat est encore vrai lorsque $X_t = \int_0^t \sigma(s)dB_s$ où B est un mouvement brownien standard et σ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, hölderienne d'ordre $\gamma > \frac{1}{4}$ et telle que $|\sigma(s)| \geqslant a > 0$.
2) Nous n'avons pas obtenu séparément la convergence de chacun des termes de $I^3_\epsilon(t)$.

Preuve du Théorème 3.1. a) D'après la formule de Tanaka,

$$X^+_{(u+\epsilon)\wedge t} = X^+_u + \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} 1\!\!1_{\{X_s>0\}}dX_s + \frac{1}{2}(L^0_{(u+\epsilon)\wedge t} - L^0_u).$$

On a une formule similaire pour $X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}$. Il est aisé d'en déduire que $I^3_\epsilon(t)$ est égal à

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t\left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\left(1\!\!1_{\{X_s>0,X_u\leqslant 0\}} - 1\!\!1_{\{X_s\leqslant 0,X_u>0\}}\right)dX_s\right)du + \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t} - L^0_u)du. \tag{8}$$

On écrit $L^0_{(u+\epsilon)\wedge t} - L^0_u = \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} dL^0_s$. Une application du théorème de Fubini permet montrer la convergence du second terme de (8) vers $\frac{1}{2}L^0_t$. On utilise le théorème de Fubini stochastique (c.f. Section IV.5 de [4]) pour transformer le premier terme de (8) en une intégrale stochastique. L'inégalité de Doob donne alors la convergence de ce terme vers 0 dans $L^2(\Omega)$.
b) Il est équivalent d'étudier la convergence de $I^4_\epsilon(t)$ ou de $I^5_\epsilon(t)$. On écrit $I^5_\epsilon(t)$ comme la somme d'un terme qui converge presque sûrement vers 0, uniformément sur les compacts, et de :

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^+} X^+_u\left[1\!\!1_{\{X_{u+\epsilon}\leqslant 0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right]du + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)du, \tag{9}$$

où Φ est la fonction de répartition de la gaussienne centrée réduite. Par la formule de densité d'occupation :

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)du = \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}} x^+\Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right)L^x_t dx = \int_0^\infty y\Phi(-y)L^{y\sqrt{\epsilon}}_t dy.$$

On en déduit facilement la convergence p.s. de ce terme vers $\frac{1}{4}L^0_t$, uniformément sur les compacts. Pour le premier terme de (9), on écrit le terme entre crochet comme une intégrale stochastique, puis on utilise le théorème de Fubini pour se ramener une martingale. Une utilisation de l'inégalité de Doob permet d'obtenir la convergence vers 0 dans $L^2(\Omega)$, uniformément sur les compacts. $\square$

4. Vitesse de convergence de $J_\epsilon(t)$ dans $L^2(\Omega)$

Théorème 4.1 *Soit (X_t) le mouvement brownien standard. Pour tout $T > 0$, $\delta \in]0, \frac{1}{4}[$, il existe une constante K_δ telle que :*

$$\forall \epsilon \in]0,1], \qquad \left\| \sup_{t\in[0,T]} \left| J_\epsilon(t) - L_t^0 \right| \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant K_\delta \epsilon^\delta. \tag{10}$$

On a un résultat similaire pour la vitesse de convergence de $I_\epsilon^i(t)$ vers sa limite, $i = 1, \ldots, 5$.

Preuve du Théorème 4.1. On utilise des éléments des preuves précédentes :

$$J_\epsilon(t) - L_t^0 = -\left(I_\epsilon^1(t) - \int_0^t \mathbb{I}_{\{0<X_s\}} dX_s \right) + \left(I_\epsilon^4(t) - \frac{1}{4} L_t^0(X) \right) + \left(I_\epsilon^5(t) - \frac{1}{4} L_t^0(X) \right) + R_\epsilon(t) \tag{11}$$

On décompose chaque terme sous la forme $\int_0^t h(s,\epsilon)dX_s + \int_0^t k(s,\epsilon)ds$. En utilisant la propriété de Hölder du mouvement Brownien et de son temps local, on majore p.s. $\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t k(s,\epsilon)ds|$ par $C\epsilon^\delta$. Grâce à l'inégalité de Doob, on majore $E((\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t h(s,\epsilon)dX_s)^2)$ par $4\int_0^T E(h^2(s,\epsilon))ds$. Il est possible, après des calculs longs et fastidieux, de montrer que ce terme est lui-même majoré par $C\sqrt{\epsilon}$. $\square$

Remarque : Malheureusement, (10) ne permet pas de montrer la convergence p.s. Il est toutefois possible, en modifiant la preuve du Théorème 4.1 et en utilisant le lemme de Borel-Cantelli, de montrer que $\sup_{t\in[0,T]} \left| J_{\epsilon_n}(t) - L_t^0 \right|$ converge presque sûrement vers 0, lorsque $n \to \infty$, où $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle positive décroissante tendant vers 0 et telle que $\sum_{i=1}^\infty \sqrt{\epsilon_i} < \infty$.

Références

[1] Kiyosi Itô and Henry P. McKean, Jr. *Diffusion processes and their sample paths.* Springer-Verlag, Berlin, 1974. Second printing, corrected, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 125.

[2] Ernesto Mordecki and Mario Wschebor. Approximation of the occupation measure of Lévy processes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340(8) :605–610, 2005.

[3] Philip E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York).* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.

[4] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

[5] Francesco Russo and Pierre Vallois. The generalized covariation process and Itô formula. *Stochastic Process. Appl.*, 59(1) :81–104, 1995.

[6] Francesco Russo and Pierre Vallois. Itô formula for C^1-functions of semimartingales. *Probab. Theory Related Fields*, 104(1) :27–41, 1996.

[7] Francesco Russo and Pierre Vallois. Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes. *Stochastics Stochastics Rep.*, 70(1-2) :1–40, 2000.

[8] Francesco Russo and Pierre Vallois. Elements of stochastic calculus via regularisation. In *Séminaire de Probabilités, XXXX*, Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 2006.

Dear Editor,

First we would like to gratefully acknowledge the referee for his (her) suggestions.

According to referee's remark, we have changed the abstract as follows :

> **Some Brownian local time approximations**
> We give some approximations of the local time process $(L_t^x)_{t\geqslant 0}$ at level x of the real Brownian motion (X_t). We prove that $\frac{2}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}1\!\!1_{\{X_u\leqslant 0\}}du+\frac{2}{\epsilon}\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}1\!\!1_{\{X_u>0\}}du$ and $\frac{4}{\epsilon}\int_0^t X_u^- 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}}du$ converge in the ucp sense to L_t^0, as $\epsilon\to 0$. We show that $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t(1\!\!1_{\{x<X_{s+\epsilon}\}}-1\!\!1_{\{x<X_s\}})(X_{s+\epsilon}-X_s)ds$ goes to L_t^x in $L^2(\Omega)$ as $\epsilon\to 0$, and that the rate of convergence is of order ϵ^α, for any $\alpha<\frac{1}{4}$.

The title of Section 2. has been changed.
The mistakes on the world "hölderien" has been corrected
The bibliography has been homogenized to follow the alphabetic order.

Yours sincerely.

Nancy on 20th April 2007,

B. Bérard-Bergery, P. Vallois.